ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1983

# PREMIÈRE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

*Durée : 3 heures*

*NOTA : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

*Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

## SUJET N° 1

n est un entier $>0$ et t est réel.

1) Décomposer les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ :

$P(X) = X^n - 1$ $\qquad$ $Q(X) = X^2 - 2X\cos t + 1$

2) En déduire la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{4k\pi}{n}} - 2e^{i\frac{2k\pi}{n}}\cdot\cos t + 1\right) = 2(1-\cos n t)$$

puis la formule (pour tout t réel non multiple de $\frac{2\pi}{n}$) :

$$\sum_{h=0}^{n-1}\frac{2e^{i\frac{2h\pi}{n}}\cdot\sin t}{e^{i\frac{4h\pi}{n}} - 2e^{i\frac{2h\pi}{n}} + 1} = \frac{n\sin n t}{1-\cos n t}$$

.../...

## SUJET N° 2

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal o x y z, on donne les deux droites D et $\Delta$ définies respectivement par les systèmes.

$$D \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Delta \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer l'équation de la surface de révolution S engendrée par la rotation de $\Delta$ autour de D.

2) Vérifier que S est une quadrique et reconnaître sa nature.

## SUJET N° 3

On donne la matrice suivante à éléments réels : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique B de E est M.

1) Déterminer une base de Im u = u (E). Quel est le rang de u ?

2) Déterminer une base de Ker u, noyau de u.

3) Déterminer une base de Im u + Ker u.

4) Montrer que E = Im u $\oplus$ Ker u (somme directe).

5) Les questions 1/, 2/, 3/ ont mis en évidence une base $\beta$ de E formée par la réunion d'une base de Im u et d'une base de Ker u. Déterminer la forme de la matrice, par rapport à $\beta$, de tout endomorphisme v de E tel que $v \circ u = 0$.

## SUJET N° 4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes en X, à coefficients réels et de degré $\leqslant 2$. Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Pour tous éléments P, Q de E, on pose :

$$f(P, Q) = P(0) \cdot Q(0) + P'(1) \cdot Q'(1) + P'' \cdot Q''.$$

1) Montrer qu'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique, positive, non dégénérée (on dit aussi définie positive) sur E. Ecrire la forme quadratique q associée à f ainsi que la matrice de q et f par rapport à la base B.

   Quels sont les vecteurs isotropes ?

2) Déterminer une base B' de E, orthonormale pour f.

3) Soit u l'endomorphisme de E défini par u (P) = P' (dérivé de P) quel que soit P.
   a) Donner la matrice de u par rapport à B puis par rapport à B'.
   b) Soit $u^*$ l'adjoint de u par rapport à f.
      Donner la matrice de $u^*$ par rapport à B'.

4) a) Déterminer les automorphismes orthogonaux de E en donnant la forme générale de leurs matrices par rapport à B'.
   b) Même question pour les endomorphismes symétriques (on dit aussi autoadjoints) de E.

.../...

## SUJET N° 5

a est une constante réelle $\neq 0$ donnée. Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal, on considère la surface S dont une représentation paramétrique est $x = 2tz + 3t^2$, $y = 2t^2z + at^3$, $z = z$.

1) Monter que S est constituée par des droites (notées $\Delta$).

2) a) Ecrire l'équation du plan tangent $P_o$ à S au point $M_o$ de paramètres $t_o$ et $z_o$ donnés (on restera dans le cas général et on ne discutera pas).

   b) Vérifier que ce plan $P_o$ contient toute droite $\Delta$ de S qui passe par $M_o$.

3) Montrer que pour que le plan tangent à S soit le même en tous les points M de S d'une même droite $\Delta$, il faut et il suffit que $a = 4$. On supposera $a = 4$ dans toute la suite.

4) On pose $z = \varphi(t)$ où $\varphi$ est une fonction dérivable. On définit ainsi une courbe $(\Gamma)$ située sur S. Montrer qu'on peut choisir $\varphi$ de manière que $(\Gamma)$ soit tangente à toutes les droites $\Delta$.

5) Déterminer le plan osculateur, l'abscisse curviligne (d'origine le point $t = o$), le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion de $(\Gamma)$ au point M de paramètre t.

## SUJET N° 6

Dans $\mathbb{R}^3$ le repère $r = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal.

Un deuxième repère $R = (o, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est défini en fonction du temps t et par rapport au premier par les formules :

$$\vec{I} = \vec{i}\cos t \cdot \cos 2t + \vec{j}\sin t \cdot \cos 2t - \vec{k}\sin 2t$$

$$\vec{J} = \vec{i}\cos t \cdot \sin 2t + \vec{j}\sin t \cdot \sin 2t + \vec{k}\cos 2t$$

$$\vec{K} = \vec{i}\sin t - \vec{j}\cos t$$

1) a) Vérifier que, quel que soit t, le repère R est orthonormal et de même sens que r.

   b) Donner les expressions de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ et de t.

2) Déterminer le vecteur rotation $\vec{\omega}(t)$ par ses coordonnées

   a) Dans R,

   b) Dans r.

3) a) Déterminer la surface décrite dans R par la droite qui porte $\vec{\omega}(t)$ quant t varie.

   b) Même problème dans r.

»»»»»■«««««